۱ -
۲ -
۳ -
۴ -
۵ -
۶ -
۷ -
۸ -
۹ -

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

۱ –

۲ –

۳ –

۴ –

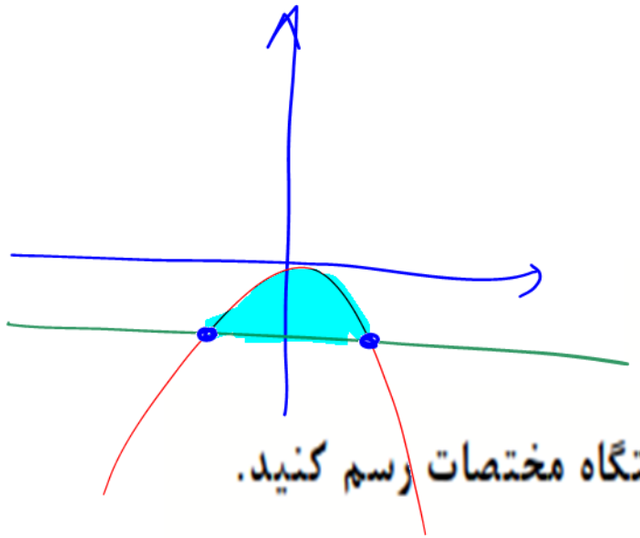
۵ –

۹ –

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

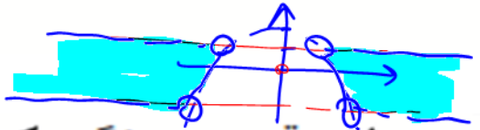
۱ – ناحیه مربوط به $x^2 \le y < 3$ را رسم کنید.



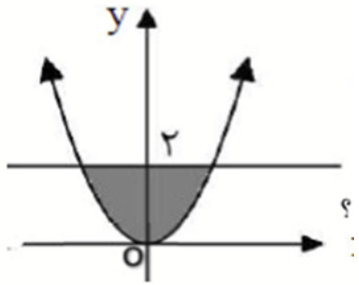
۲ – شکل مربوط به نامعادلات $x^2 \le -y, y \ge -1$ را رسم کنید.

$x^2 > -y+2 \to x^2 > -(y-2)$

۳ – نمودار مربوط به روابط $x^2 + y > 2$ و $-1 < y < 1$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



۴ – الف) رابطه مربوط به قسمت رنگی کدام است؟



۱) $2 \le y \le x^2$ ۲) $x^2 \le y \le 2$

۵ – شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $-2 < y \le -1$, $y < -x^2 + 1$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

- شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $y = x^2$, $-1 < x \le 2$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

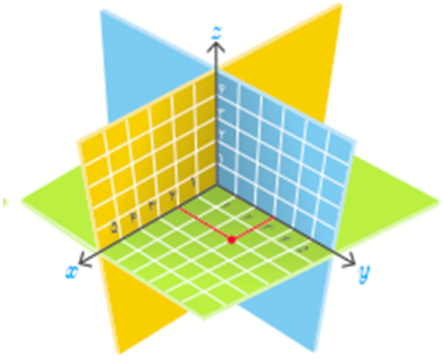
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

مشابه $\mathbb{R}^2$ می‌توان مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) که در آنها x,y,z اعداد حقیقی‌اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای $\mathbb{R}^3$ می‌گویند.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−



شکل شماره ۱

❖ **معادله صفحه** xoy ها به صورت $\{(x,y,0)\,|\,x,y\in\Re\}$ **یا به صورت** $z=0$ است

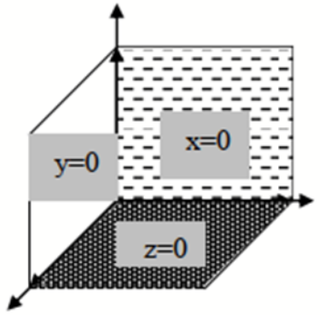
هرنقطه ای که مولفه سوم آن صفر باشد آن نقطه روی **صفحه** xoy هاست.

❖ **معادله صفحه** yoz ها به صورت $\{(0,y,z)\,|\,x,y\in\Re\}$ **یا به صورت** $x=0$ است

هرنقطه ای که مولفه اول آن صفر باشد آن نقطه روی **صفحه** yoz هاست .

❖ **معادله صفحه** xoz ها به صورت $\{(x,0,z)\,|\,x,y\in\Re\}$ **یا به صورت** $y=0$ است

هرنقطه ای که مولفه دوم آن صفر باشد آن نقطه روی **صفحه** xoz هاست



معادله محور طول ها به صورت $\{(x,0,0)\,|\,x\in\Re\}$ **یا به صورت** $\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$ است

هرنقطه ای که مولفه دوم وسوم آن صفر باشد آن نقطه روی محور طول هاست.

معادله محور عرض ها به صورت $\{(0,y,0)\,|\,y\in\Re\}$ **یا به صورت** $\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$ است

هر نقطه ای که مولفه اول وسوم آن صفر باشد نقطه روی محور عرض هاست .

معادله محور ارتفاع ها به صورت $\{(0,0,z)\,|\,z\in\Re\}$ **یا به صورت** $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ است

هر نقطه ای که مولفه اول ودوم آن صفر باشد نقطه روی محور ارتفاع هاست

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

۱ ـ معادلهٔ صفحه‌ای در فضای R^3 را بنویسید که موازی صفحهٔ xy باشد.

xy $z=$

$z=0$ یا $z=1$

۲ ـ معادله صفحه‌ای که موازی yoz است و از نقطه $A(2, -1, 3)$ می‌گذرد، برابر با $x=2$ است.

$x=$

۳ ـ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

خط به معادله $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ بر صفحه xoz عمود است. نادرست

۴ ـ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

نقطه $(-2, 3, -1)$ در ناحیه ششم مختصاتی قرار دارد. درست

$2+4-$

۵ ـ در فضای سه‌بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ خطی موازی محور z ها است.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

۱ – معادلهٔ صفحه‌ای که بر محور zها در نقطه به مختصات $A = (۰ , ۰ , ۳)$ عمود باشد، به صورت ..... است.

$z = ۳$

۲ – در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$، معادله محور ..... است.

yها

۳ – معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ y = ۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $R^۳$ است؟

۴ – اگر $y = b$ معادله‌ی صفحه‌ای در فضای $R^۳$ باشد که از نقطه $A = (۲ , -۳ , ۴)$ بگذرد، مقدار عددی b چه‌قدر است؟

$y = -۳$

۵ – در فضای $R^۳$، نقطه $(-۳ , ۲ , -۵)$ در ناحیه (کنج) ..... دستگاه مختصات قرار دارد.

۶

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

مثال : روی صفحهٔ $z=۱$ نقاط $A=(۱,۲,۱)$ و $B=(۲,۲,۱)$ و $C=(۳,۲,۱)$ را در نظر می‌گیریم، مؤلفهٔ دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحهٔ مزبور ($z=۱$) تمام نقاطی که مؤلفهٔ دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می‌دهند (نمودار آن یک خط است به معادلات $\begin{cases} y=۲ \\ z=۱ \end{cases}$)

- نقاط $A=(۱,۲,۱)$ و $B=(۲,۲,۱)$ و $C=(۳,۲,-۱)$ را در فضا درنظر می‌گیریم. کدام‌ها روی خط $\begin{cases} y=۲ \\ z=۱ \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟

$-۱ \neq ۱$ $\begin{cases} ۲=۲ \\ ۱=۱ \end{cases}$

نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ در فضای $R^۳$ چه شکلی است؟ و چه ارتباطی با نمودار $x=۰$ دارد؟

محور yها بر صفحه $x=0$ منطبق است

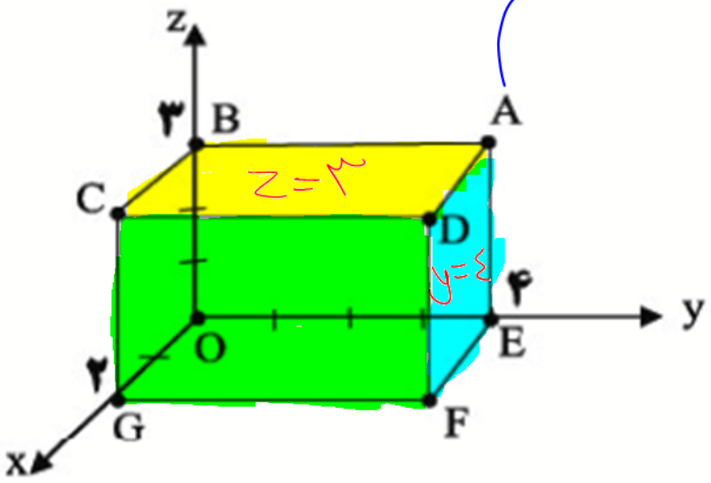
- درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
نقطه $A(۲,-۳,۰)$ روی صفحه xoy قرار دارد.

درست

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

$\begin{cases} x=0 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$ $A(0,4,3)$



وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل، قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x = ۲$، $x = ۰$ و $y = ۰$, $y = ۴$ و $z = ۳$, $z = ۰$ هستند.

الف) مختصات نقطه A را مشخص کنید.

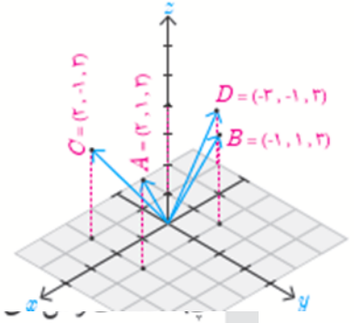
ب) معادلات مربوط به یال AD و وجه CDFG را بنویسید.

$\begin{cases} x=2 \\ 0 \le y \le 4 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$ $AD \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ z=3 \end{cases}$

۱ــ چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.

الف) معادلات مشخص‌کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.



$\begin{cases} y=-1 \\ z=2 \end{cases}$

ت) روابط مشخص‌کنندهٔ یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کنندهٔ پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید.

$$\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

ث) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات

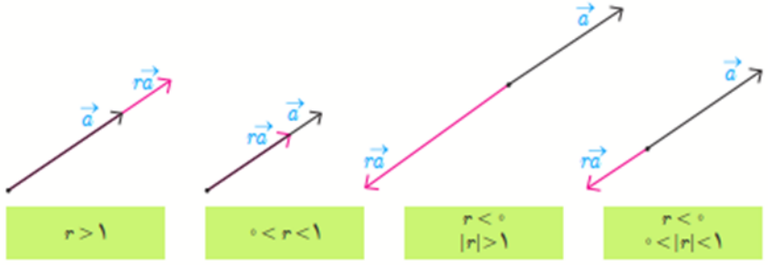
اگر نقاط $A = (۳, -۱, ۲)$, $B = (۱, -۱, ۲)$ در دستگاه $R^۳$ باشند، معادلهٔ خط AB را بنویسید.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

در بردار را مساوی یا همسنگ گوییم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. در شکل مقابل

می‌توان نشان داد دو بردار $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ همواره با هم موازی‌اند و برعکس اگر دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است.

در شکل‌های زیر وضعیت دو بردار $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ در حالت‌های مختلف نشان داده شده‌اند.

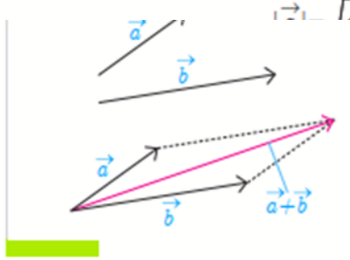


با توجه به اینکه ابتدای هر بردار مانند $\vec{a}=(a_1,a_2)$ را می‌توان مبدأ مختصات در نظر گرفت، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار $\vec{a}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

از سال‌های قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ از روش متوازی‌الاضلاع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید و به آن برایند دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ می‌گویند.

و نیز اگر داشته باشیم $\vec{a}=(a_1,a_2)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2)$ می‌توان نوشت:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$



۱- بردارهای $\vec{a}=(0,-1,1)$ و $\vec{b}=(2,0,1)$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل عبارت $3\vec{a}-\vec{b}$ را به دست آورید.

- با فرض $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$، $\vec{b}=(3,1,1)$ و $r=-2$، مختصات بردار $r\vec{a}+\vec{b}$ را به دست آورید.

با فرض $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}$، $\vec{b}=(3,-1,1)$، $r=3$، $s=2$، مختصات بردار $r\vec{a}-s\vec{b}$ را به دست آورید.

۱/۵

$3(2,-2,0)-2(3,-1,1)=(0,-4,-2)$

- طول بردار $\vec{a}=(0,-3,4)$ را به دست آورید.

$|a|=\sqrt{0+9+16}$

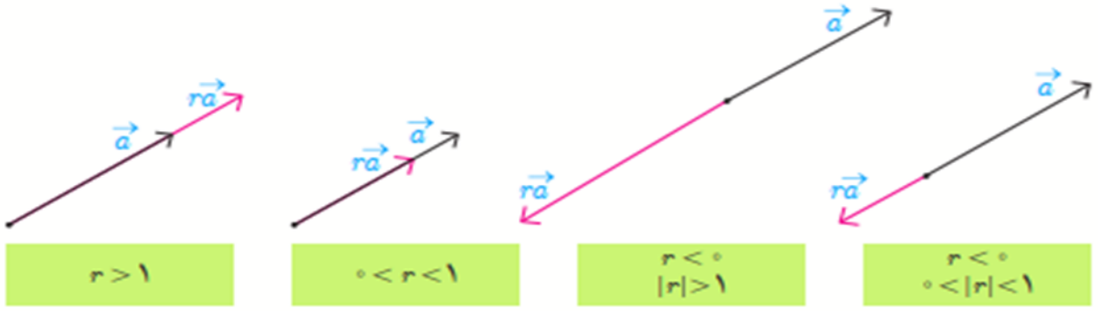
درست $=5$

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه، r عدد حقیقی و $\vec{b}=r\vec{a}$ آنگاه $|\vec{b}|=|r||\vec{a}|$. (درست - نادرست)

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی

می‌توان نشان داد دو بردار $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ همواره با هم موازی‌اند و برعکس اگر دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است.

در شکل‌های زیر وضعیت دو بردار $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ در حالت‌های مختلف نشان داده شده‌اند.



$|a| = \sqrt{16+16+4}$

بردار $\vec{a} = (4, -4, 2)$ مفروض است. بردار $\vec{b}$ غیرهم‌جهت با $\vec{a}$ و به طول ۱۲ را طوری بیابید که $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ باشد.

$\vec{b} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = k\vec{a} \rightarrow |\vec{b}| = |k|\cancel{|a|}^{6} = 12 \Rightarrow k = \pm 2$

$\vec{b} = -2\vec{a} = (-8, +8, -4)$

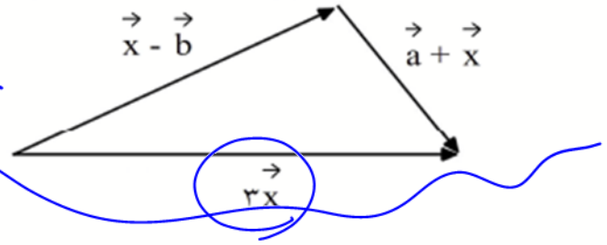
پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

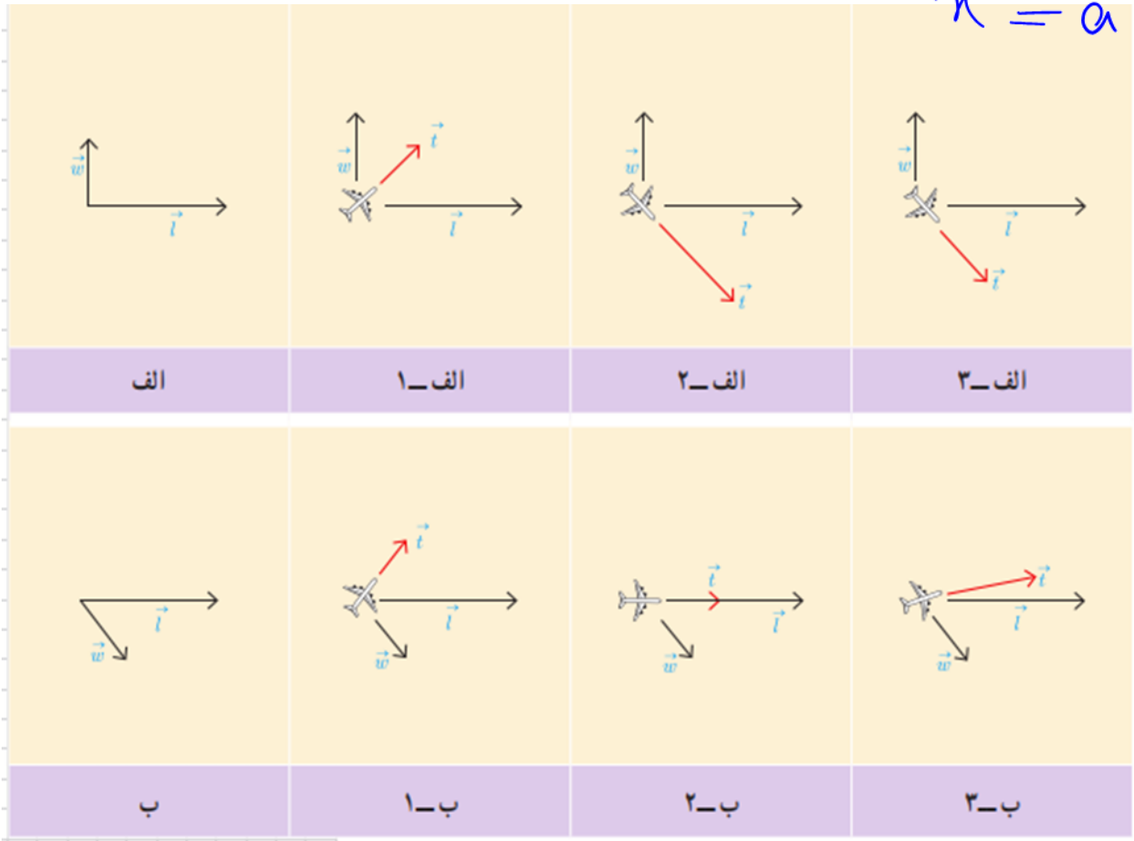
پویش علمی ماندگار البرز

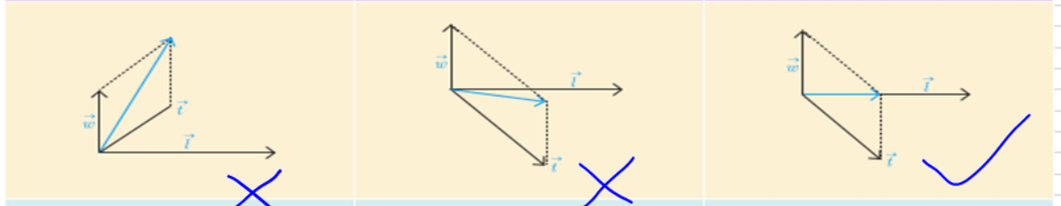
ج) در شکل مقابل بردار $\acute{x}$ برحسب $\acute{a}$ و $\acute{b}$ برابر با ..... است.

$3x - (x - b) = a + x$

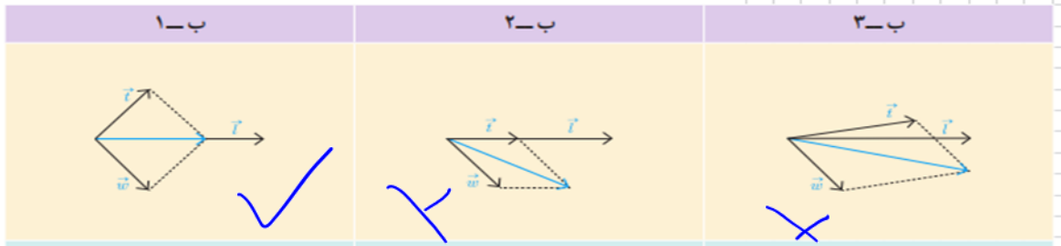
$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$





الف ــ ۱	الف ــ ۲	الف ــ ۳
		
بردار برایند در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از بالای باند)	بردار برایند در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از پایین باند)	بردار برایند در جهت $\vec{t}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{t}$ است. بنابراین $\vec{t}$ فرود ایمن است.

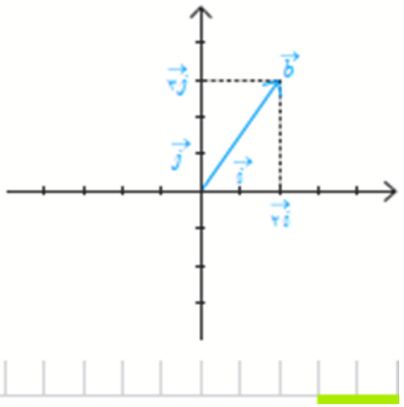
در مورد وضعیت ب برایند بردارهای $\vec{w}$ (نیروی باد) و $\vec{t}$ (نیرو محرکه هواپیما) به‌صورت زیر است.

ب ــ ۱	ب ــ ۲	ب ــ ۳
		
بردار برایند در جهت $\vec{t}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{t}$ است. بنابراین فرود ایمن است.	بردار برایند در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از پایین باند)	بردار برایند در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از پایین باند)

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

معمولاً بردار به طول واحد در جهت محور xها را با $\vec{i}$ و بردار به طول واحد در جهت مثبت محور yها را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهند. در شکل مقابل بردار $\vec{i}=(۱,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱)$ و نیز بردار $\vec{b}=(۲,۳)$ به‌صورت حاصل‌جمع مضاربی از $\vec{i},\vec{j}$ نمایش داده شده‌اند. به‌طور کلی می‌توان هر بردار دلخواه مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ را به‌صورت زیر نمایش داد.



$$\vec{a}=(a_۱,a_۲)=a_۱(۱,۰)+a_۲(۰,۱)=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}$$

بردارهای یکه

با بردارهای یکه $\vec{i},\vec{j}$ در صفحه $\mathbb{R}^۲$ به ترتیب در جهت محور xها و yها آشنا شدید. به‌طور مشابه در $\mathbb{R}^۳$ بردارهای زیر را با طول واحد در جهت محورهای مختصات $\mathbb{R}^۳$ در نظر می‌گیرند.

$\vec{i}=(۱,۰,۰),\ \vec{j}=(۰,۱,۰),\ \vec{k}=(۰,۰,۱)$

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

حاصل عبارت $(\vec{i}\times\vec{j}).\vec{i}$ برابر صفر است. درست

$\vec{k}$

حاصل $((\vec{i}\times\vec{k})\times\vec{i}).\vec{j}$ برابر صفر است.

$-\vec{j}$

$\vec{k}.\vec{j}$

پ) بردار $\vec{a}=\left(۰,\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)$، یک بردار یکه است. نادرست

حاصل هر کدام از عبارات گروه A را از گروه B انتخاب کنید. (دو مورد از گروه B اضافی است)

گروه A		گروه B				
الف) $(\vec{i}\times\vec{j})+(\vec{i}\times\vec{i})$	ب) $(\vec{k}.\vec{k})\vec{i}$		$\vec{O}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$	$\vec{i}$

$\vec{k}$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

خواص جمع بردارها

در کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم.

به‌طور کلی اگر $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{O}=(0,0,0)$ بردار صفر و نیز r و s دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

۱ـ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)

۲ـ $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (خاصیت شرکت‌پذیری در جمع)

۳ـ $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{O}$ (عضو قرینه)

۴ـ $\vec{a}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{a}=\vec{a}$ (عضو خنثی)

۵ـ $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$

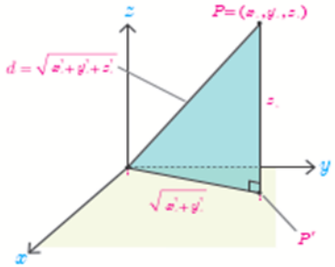
۶ـ $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

۷ـ $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})$

۸ـ اگر $\vec{b}=r\vec{a}$ آنگاه $|\vec{b}|=|r||\vec{a}|$ ($|r|$ قدر مطلق r است)

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

هرگاه مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی $x_0 = x_1 , y_0 = y_1 , z_0 = z_1$.

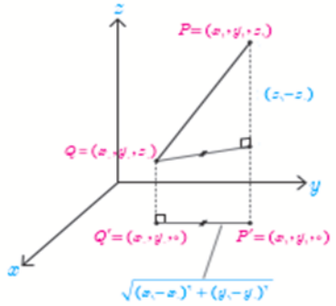


برای یافتن فاصله یک نقطه از $\mathbb{R}^3$ مانند $P=(x_0,y_0,z_0)$ از مبدأ مختصات کافی است از نقطه P عمودی بر صفحه xy رسم کرده و پای عمود را P' بنامیم. در این‌صورت با توجه به شکل مقابل ازقضیه فیثاغورس طول پاره خط OP' به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$|OP'|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه OPP' از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر OP استفاده می‌کنیم. پس داریم :

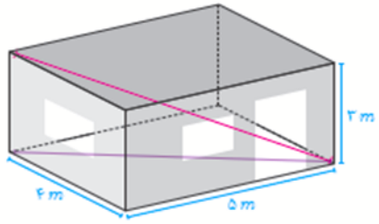
$$|OP|=\sqrt{|OP'|^2+z_0^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$



رابطه فوق را می‌توان با توجه به شکل برای فاصله دو نقطه دلخواه از $\mathbb{R}^3$ مانند $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$ به‌صورت زیر تعمیم داد.

$$|PQ|=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

مثال : در این شکل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده می‌شود. طول قطر این اتاق از یک گوشه ان به گوشه مقابلش چقدر است؟



قطر مستطیل کف اتاق $=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41} \Rightarrow$ قطر اتاق $=\sqrt{41+3^2}=5\sqrt{2}$

حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به بررسی نمودارهای مربوط به آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه یا معادله مربوط به آنها می‌پردازیم.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

- نقطه A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطه B(۱ , ۰ , ۱) در فضا مفروض‌اند. فاصله مختصات وسط AB تا مبدا مختصات را حساب کنید.

$A(0,0,3)$ $\quad M(\frac{1}{2},0,2)$ $\quad OM=\sqrt{\frac{1}{4}+0+9}=\frac{\sqrt{37}}{2}$

- نقطه A به طول ۲ روی محور xها و نقطه B روی صفحه xoz به طول۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه‌بعدی مفروض‌اند.

الف) مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.

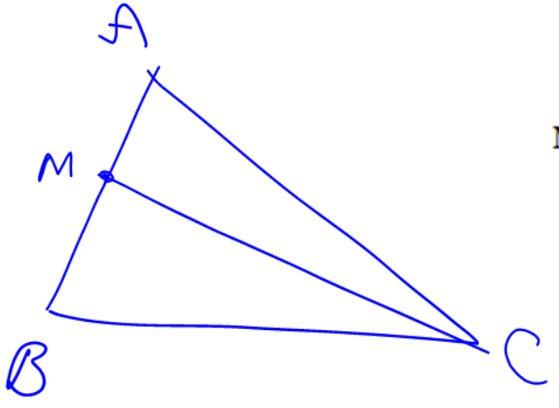
ب) طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.

پ) مختصات وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.

$\begin{cases} A(2,0,0) \\ B(1,0,3) \end{cases}$

$AB=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$M(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$



- نقاط A = (۱ , ۲ , ۱)، B = (-۱ , ۰ , -۵) و C = (-۱ , ۳ , ۱) سه راس یک مثلث هستند. اگر نقطهٔ M وسط ضلع AB باشد، طول پاره‌خط CM (میانهٔ وارد بر ضلع AB) را حساب کنید.

$M(0,1,-2)$

$CM=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

تعریف: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند؛ در این‌صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می‌توان نشان داد که اگر $0\le\theta\le\pi$ زاویه بین دو بردار ناصفر $\vec{a},\vec{b}$ در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

خواص ضرب داخلی

۱ـ $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ خاصیت جابه‌جایی

اثبات:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\vec{b}.\vec{a}$$

۲ـ $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$

اثبات:

$$\vec{a}.\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\vec{a}|^2$$

۳ـ $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ خاصیت توزیع‌پذیری

اثبات:

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)$$
$$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3$$
$$=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$

۴ـ برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$: $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow$ a و b برهم عمود هستند

$$\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0\overset{|\vec{a}|\neq0,\ |\vec{b}|\neq0}{\Leftrightarrow}\cos\theta=0\overset{0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}\theta=\frac{\pi}{2}$$

۵ـ $\vec{a}.\vec{0}=0\ ,\ \vec{0}.\vec{a}=0$

۶ـ $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ (نامساوی کشی شوارتز) منظور از $|\vec{a}.\vec{b}|$ قدر مطلق مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ است.

$$|\vec{a}.\vec{b}|=\left||\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\right|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

که در آخرین نامساوی از $|\cos\theta|\le1$ استفاده شده است.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

. با فرض اینکه $|\vec{a}| = |\vec{b}| = ۲$ و زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر ۶۰° باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\vec{a}.\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$

$= ۲(۲)(\frac{۱}{۲}) = ۲$

ب) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |a||b|\sin ۶۰$

$= ۲(۲)(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۲\sqrt{۳}$

$|\vec{a}+\vec{b}|^۲ = |a|^۲ + |b|^۲ + ۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos ۶۰$

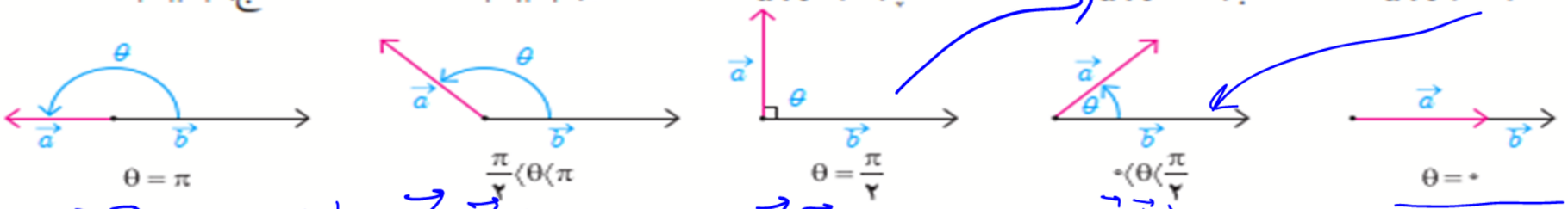
$= ۴ + ۴ + ۲(۲)(۲)(\frac{۱}{۲})$

$|\vec{a}+\vec{b}| = ۲\sqrt{۳}$

$|\vec{a}-\vec{b}| = ۲$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

الف) $\vec{a}.\vec{b}>0$ ب) $\vec{a}.\vec{b}=0$ پ) $\vec{a}.\vec{b}<0$ ت) $\vec{a}.\vec{b}=|a||b|$ ج) $\vec{a}.\vec{b}=-|a||b|$



$\vec{a}.\vec{b}=-|a||b|$ $\vec{a}.\vec{b}<0$ $\vec{a}.\vec{b}=0$ $\vec{a}.\vec{b}>0$ $\vec{a}.\vec{b}=|a||b|\cos\theta$

۱) - زاویه بین بردارهای غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر θ است. در کدام‌یک از موارد زیر حاصل‌ضرب داخلی آنها بیشتری مقدار را دارد.

۱) $\theta=0$ ۲) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۴) $\theta=\frac{\pi}{3}$

۲) - اگر $\vec{a}.\vec{b}<0$، آنگاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد؟

۱) 45° ۲) 90° ۳) 135° ۴) 180°

۳) - درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$ در این صورت $\theta=\frac{\pi}{2}$ است (θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است).

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

مثال : زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را پیدا می‌کنیم.

حل : ابتدا ضرب داخلی دو بردار را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{a}.\vec{b}=(۲\times۱)+(-۱\times-۱)+(۲\times۰)=۳$$

از طرفی اگر $۰\le\theta\le\pi$ زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت :

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow ۳=\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲+۲^۲}\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲+۰^۲}\cos\theta \Rightarrow$$

$$\cos\theta=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$۲m=۲\sqrt{۲}\sqrt{۲+m^۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$۴m^۲=۴+۲m^۲$$

$$m^۲=۲\Rightarrow m=\pm۲$$

کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(۱,۰,۱)$, $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ را به دست آورید.

سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ در نظر بگیرید.

الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

مقدار m را طوری بیابید که زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(m,۰,۲)$ و $\vec{b}=(۲,-۲,۰)$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد.

زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را به دست آورید.

اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,n)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ برابر با ۱۳۵ درجه باشد. مقدار n را بیابید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

حاصل‌ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر ...صفر... است.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$

دو بردار غیرصفر $\vec{a},\vec{b}$ را که زاویه بین آنها θ است با فرض $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ که آن را با $\vec{a'}$ نمایش داده‌ایم به‌دست آوریم. از روی شکل مشخص است که برای یک r حقیقی $\vec{a'}=r\vec{b}$.

با توجه به اینکه بردار تفاضل $\vec{a}$ از $\vec{a'}$ بر بردار $\vec{b}$ عمود است. خواهیم داشت:

$$(\vec{a}-\vec{a'}).\vec{b}=0 \Rightarrow (\vec{a}-r\vec{b}).\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}-r\vec{b}.\vec{b}=0 \Rightarrow r=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

بنابراین بردار تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\vec{a'}=r\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

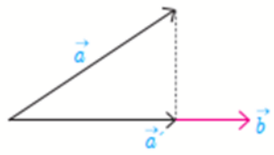
مثال: تصویر قائم بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(1,-1,0)$ بیابید.

$$\vec{a}.\vec{b}=2\times1+(-1)(-1)+(2)(0)=3$$

$$|b|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$a'=\frac{a.b}{|b|^2}b=\frac{3}{2}b=\frac{3}{2}(1,-1,0)=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0)$$

تصویر قائم بردار $\vec{a}=(1,3,1)$ بر امتداد بردار $\vec{b}=(-2,0,1)$ را به دست آورید.



اگر $\vec{a'}$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ باشد، حاصل $|\vec{a'}|$ کدام است؟

۱) $\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ ۲) $|\vec{a}||\vec{b}|$ ۳) $|\vec{a}.\vec{b}|$ ۴) $\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|^2}$

$$|\vec{a'}|=\left|\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\right|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|^2}\cancel{|\vec{b}|}$$

$$|\vec{a'}|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

- فرض کنید $\vec{a} = \left(\frac{۳}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و $\vec{b} = (۱, ۰, ۱)$. تصویر قائم بردار $۲\vec{a} - \vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

$$\vec{c} = (۳, -۱, ۱) - (۱, ۰, ۱) = (۲, -۱, ۰)$$

$$\vec{c}' = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = \frac{۲}{۲}\vec{b} = (۱, ۰, ۱)$$

- اگر $\vec{a} = (۱, -۳, ۴)$ و $\vec{b} = ۳\vec{i} - ۴\vec{j} + ۲\vec{k}$ باشند. آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بر بردار $\vec{a} - \vec{b}$ بیابید.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. می‌توان ضرب دو بردار را به گونه‌ای تعریف کرد که حاصل‌ضرب آنها همواره یک بردار باشد.

تعریف: فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. ضرب خارجی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$$

خاصیت ۱ : فرض کنید $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. در این صورت

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0 \quad , \quad \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که $\vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$

بنابراین با توجه به آنچه تاکنون به‌دست آمده است می‌توان گفت ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی‌الاضلاع ایجاد شده توسط آن دو بردار است. در واقع می‌توان نشان داد که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل آن دو بردار عمود است.

اثبات این خاصیت در ادامه می‌آید.

اثبات :

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

$$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=b_1(a_2b_3-a_3b_2)+b_2(a_3b_1-a_1b_3)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

می‌توان نشان داد که برای سه بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روابط زیر برقرار است :

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ,\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ ,\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\ ,\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\ ,\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

معمولاً این روابط را به‌صورت نمودار چرخشی نیز نمایش می‌دهند.

خاصیت ۲ : $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

خاصیت ۳ : $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

خاصیت ۴ : اگر r عددی حقیقی باشد، آنگاه : $r\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\vec{b}$.

خاصیت ۵ : برای سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ داریم :

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

- اگر $\vec{a} = (m, ۲, -۱)$ ، $\vec{b} = (m-۱, ۱, -۱)$ ، $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{۲}$ در این صورت مقدار m را به دست آورید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & ۲ & -۱ \\ m-۱ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = (-۱, ۱, ۲-m) \longrightarrow \sqrt{۱+۱+(۲-m)^۲} = \sqrt{۲}$$

$$m = ۲$$

- برداری به طول واحد بیابید که بر دو بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ عمود باشد.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = (۳, -۳, -۳) \longrightarrow \vec{c} = (۳x, -۳x, -۳x)$$

$$\vec{c} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|\vec{c}| = ۱ \longrightarrow ۳\sqrt{۳}|x| = ۱ \longrightarrow x = \pm \frac{۱}{۳\sqrt{۳}} \longrightarrow$$

- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری‌که $|\vec{a}| = ۶$ و $|\vec{b}| = ۴$ و زاویه بین آن‌ها ۳۰ درجه است. مقدار عبارت $|۲\vec{a} \times \vec{b}|$ را محاسبه کنید.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

- درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

برای بردار غیر صفر $\vec{a}$ در R^3 داریم: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$

برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، تساوی $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ همواره برقرار است.

نادرست

- اگر $\vec{a}$ یک بردار در فضای R^3 باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{o}$ $\quad |\vec{a}|^2$

۲) $\vec{a} \times \vec{a} = ۰$ $\quad \vec{o}$

۳) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$

۴) $\vec{a} \cdot \vec{a} = ۰$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

خاصیت ۶ : دو بردار غیر صفر $\vec{a}$, $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.

اثبات :

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0 \Leftrightarrow \sin=0 \Leftrightarrow \theta=0$ یا $\theta=\pi \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$

۴- برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$: a و b برهم عمود هستند $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$

$$\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0 \overset{|\vec{a}|\neq 0}{\underset{|\vec{b}|\neq 0}{\Leftrightarrow}} \cos\theta=0 \overset{0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \theta=\frac{\pi}{2}$$

- کدام‌یک از بردارهای زیر، بر راستای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود نیست.

۱) $\sqrt{3}\vec{a}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{b}\right)$ ۲) $\vec{a}\times\vec{b}$

۳) $2\vec{a}+3\vec{b}$ ۴) $\vec{b}\times\frac{\sqrt{2}}{5}\vec{a}$

- عبارت درست یا نادرست را مشخص کنید.

الف) دو بردار مخالف صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند. اگر و تنها اگر $\vec{a}.\vec{b}=\vec{0}$.

ب) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه است. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$. برداری غیر هم جهت با بردار $\vec{b}$ است.

مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}=(2, m, -1)$ و $\vec{b}=(m+1, 3, 2)$ بر هم عمود باشند.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b} = ۰$.

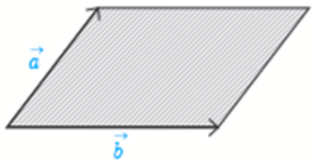
برای هر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید: اگر $\vec{a}.\vec{b} = ۰$ باشد آن‌گاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند.

) دو بردار غیرصفر a و b ..... هستند؛ اگر و فقط اگر $a.b = ۰$. (بر هم عمود - با هم موازی)

حاصل‌ضرب خارجی دو برابر غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با هم موازی هستند، برابر بردار ..... است.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز



از هندسه سال قبل می‌دانیم که سمت راست عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که اندازه اضلاع آن برابر $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ است.

مثال: بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. حاصل $\vec{i}\times\vec{j}$ و $\vec{j}\times\vec{i}$ را به‌دست

- مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ به وجود می‌آید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۳ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۰ & ۱\end{vmatrix}$$

$$|a\times b|=\sqrt{\quad}$$

سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ را درنظر بگیرید:

الف) طول بردار $۲\vec{b}-\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}+\vec{c}$ ایجاد می‌شود را به دست آورید.

اگر مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود $۶\sqrt{۳}$ باشد و $|\vec{a}|=۴$ و $|\vec{b}|=۳$.

حاصل $\vec{a}.(\vec{a}-\vec{b})$ را به دست آورید.

$$S=|a\times b|=۶\sqrt{۳}=\underset{۳}{|a|}\,\underset{۴}{|b|}\sin\theta$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\theta=۶۰\Rightarrow\cos ۶۰=\frac{۱}{۲}$$

$$|\vec{a}|^۲-\vec{a}.\vec{b}=$$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

نقاط $A(۱, ۰, ۰)$ و $B(۰, -۲, ۰)$ و $C(۰, ۰, ۳)$ داده شده‌اند. ابتدا حاصل $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ را محاسبه کرده و سپس به کمک آن مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به اندازه‌های ۳ و ۴ با یکدیگر زاویهٔ ۳۰° می‌سازند.
مساحت مثلثی که توسط دو بردار $(-۲\vec{a})$ و $(-\vec{b})$ ساخته می‌شود را محاسبه کنید.

$S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

دبیرستان ماندگار البرز

- فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $۲\vec{a}$ تولید می‌شود را بیابید.

- اگر $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۵$ و حاصل‌ضرب داخلی دو بردار ۱۰ باشد. مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تولید می‌شود چقدر است؟

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

اگر $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۵$ و حاصل‌ضرب داخلی دو بردار ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تولید می‌شود چقدر است؟

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$

$۱۰ = ۳ \times ۵ \times \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱۰}{۱۵} = \frac{۲}{۳}$

$\sin\theta = \sqrt{۱ - \frac{۴}{۹}} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$

$S = \frac{۱}{۲}|a \times b| = \frac{۱}{۲}(۳)(۵)\left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right) = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$

بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۲۶$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۷۲$. اگر زاویه بین بردارها کم‌تر از قائمه باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را به دست آورید.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

حجم متوازی السطوح

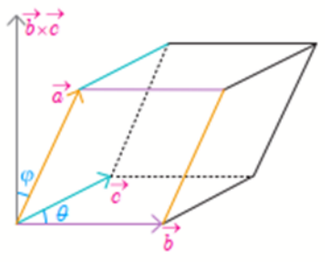
اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می‌توان به کمک آنها متوازی‌السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.

همان‌طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی‌السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شده پس مساحت آن برابر است با $|\vec{b}\times\vec{c}|$. با استفاده از دترمینان نیز می‌توان مساحت متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ به صورت زیر به دست آورد :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S=|\vec{a}\times\vec{b}|$$



مثال : حجم متوازی‌السطوحی را به‌دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{c}=(1,0,1)$ تولید می‌شود.

حل : با استفاده از ضرب خارجی b در بردار c به‌دست می‌آید.

$$\vec{b}\times\vec{c}=(1,1,-1)$$

بنابراین حجم متوازی‌السطوح به‌دست می‌آید.

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|(1,1,0).(1,1,-1)|=|1+1+0|=2$$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

- سه بردار $\vec{a} = (۲ , ۳ , ۱)$ و $\vec{b} = (-۱ , ۱ , ۰)$ و $\vec{c} = (۲ , ۱ , -۲)$ مفروض‌اند.

الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.

دبیرستان ماندگار البرز

- حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a} = (۱ , ۰ , -۱)$ و $\vec{b} = (۰ , ۲ , ۲)$ و $\vec{c} = (۲ , -۳ , ۰)$ تولید می‌شود.

حجم $= |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})| = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۲ & -۳ & ۰ \end{vmatrix} = ۱(۶) - ۱(-۴) = ۱۰$

- بردارهای $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ، $\vec{b} = (۰ , ۱ , ۱)$ و $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$ بر سه یال یک متوازی‌السطوح منطبق هستند. اگر قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شود. اندازه ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید.

حجم = مساحت × ارتفاع ← ارتفاع = $\frac{\text{حجم}}{\text{قاعده}}$ $|b\times c| = |\quad|$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

مثال : آیا بردارهای $\vec{a}=(۱,۴,۱)$, $\vec{b}=(۱,-۱,۳)$, $\vec{c}=(۱,۹,-۱)$ در یک صفحه‌اند؟

حل : برای این منظور کافی است $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ را به‌دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولیدشده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$\vec{b}\times\vec{c}=(-۲۶,۴,۱۰) \Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-۲۶+۱۶+۱۰=۰ \Rightarrow$ سه بردار در یک صفحه هستند.

- اگر سه بردار $\vec{a}=(m,-۱,۱)$، $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ و $\vec{c}=(۱,m,-۱)$ در یک صفحه واقع باشند، مقدار m را بیابید.

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

تمرین

۱ــ برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به‌دست آورید.

الف) $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ ، $\vec{b}=i$ ب) $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ ، $\vec{b}=(۳,۲,۱)$

پ) $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ ، $\vec{b}=(-۱,۲,۴)$

۲ــ فرض کنید $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$. مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=۰$ را محاسبه کنید.

۳ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۴ــ اگر $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$, $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ باشند آنگاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به‌دست آورید.

۵ــ برداری عمود بر دو $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$, $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ بردار پیدا کنید.

۶ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷ــ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که $|\vec{a}|=۳$ ، $|\vec{b}|=۲۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$. مقدار $a.b$ را محاسبه کنید.

۸ــ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A=(۳,۵,۷)$, $B=(۵,۵,۰)$, $C=(-۴,۰,۴)$ داده شده است را بیابید.

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

- ثابت کنید: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$

- برای هر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید: اگر $\vec{a}.\vec{b} = ۰$ باشد آن‌گاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند.

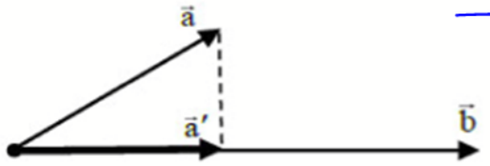
ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند. آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$. برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

صفحه ۸۰
سوال ۲

- اگر بردار $\vec{a} = (a_۱ , a_۲ , a_۳)$ باشد. ثابت کنید:

$$\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^۲$$

- نشان دهید: تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر $\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$ است.



- برای هر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید: $|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$. (منظور از $|\vec{a}.\vec{b}|$ قدرمطلق مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ می‌باشد.)

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

- برای هر دو بردار دلخواه $\vec{b}$ و $\vec{a}$ ثابت کنید.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^{2}+\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^{2}=\left|\vec{a}\right|^{2}\left|\vec{b}\right|^{2}$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

- جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

بردار نیمساز دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$، بردار ..... است.

$\vec{i}+\vec{j}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی
ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز